1. Geometria solida — dal quadrato al cubo, con sei coni

VOLUME, SUPERFICIE, SPIGOLI E UN SOLIDO COMPOSTO

Lo spigolo del cubo

L'area del quadrato è $529\ \mathrm{cm}^2$. Il lato del quadrato è la radice quadrata dell'area:

$$\ell = \sqrt{529} = 23\ \mathrm{cm}.$$

Questo lato è lo spigolo del cubo: $\ell = 23\ \mathrm{cm}$.

Punto (a) — Volume, superficie totale, somma degli spigoli

Volume — spigolo elevato al cubo:

$$V = \ell^3 = 23^3 = 12\,167\ \mathrm{cm}^3.$$

Superficie totale — sei facce quadrate uguali:

$$S_{\text{cubo}} = 6 \cdot \ell^2 = 6 \cdot 529 = 3174\ \mathrm{cm}^2.$$

Somma degli spigoli — un cubo ha 12 spigoli, tutti uguali:

$$\Sigma = 12 \cdot \ell = 12 \cdot 23 = 276\ \mathrm{cm}.$$

RISULTATO — PUNTO (A)

$$V = 12\,167\ \mathrm{cm}^3; \quad S_{\text{cubo}} = 3174\ \mathrm{cm}^2; \quad \Sigma_{\text{spigoli}} = 276\ \mathrm{cm}.$$

Punto (b) — Sei coni appoggiati sulle facce

Su ogni faccia appoggiamo un cono con la base **inscritta** nella faccia quadrata: il cerchio di base tocca i lati del quadrato, quindi il suo diametro è uguale al lato. Il raggio è la metà:

$$r = \frac{\ell}{2} = \frac{23}{2} = 11{,}5\ \mathrm{cm}.$$

L'altezza del cono è $\frac{5}{3}$ dello spigolo:

$$h = \frac{5}{3} \cdot 23 = \frac{115}{3} \approx 38{,}33\ \mathrm{cm}.$$

Per la superficie laterale del cono ci serve l'**apotema** a (teorema di Pitagora sul triangolo rettangolo di cateti r e h):

$$a = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{11{,}5^2 + \left(\tfrac{115}{3}\right)^2} = \sqrt{132{,}25 + 1469{,}44} = \sqrt{1601{,}69} \approx 40{,}02\ \mathrm{cm}.$$

COSA CAMBIA NELLA SUPERFICIE

Quando appoggiamo un cono su una faccia, il cerchio di base del cono **copre** una parte della faccia quadrata: quella porzione non è più visibile. Resta visibile la "cornice" della faccia (quadrato meno cerchio inscritto). In compenso compare la superficie laterale del cono. Quindi, per ognuna delle sei facce, contiamo: **(quadrato – cerchio) + superficie laterale del cono**.

Calcoliamo i due contributi per **una** faccia.

Cornice (quadrato meno cerchio inscritto):

$$\ell^2 - \pi r^2 = 529 - \pi \cdot 132{,}25 \approx 529 - 415{,}48 = 113{,}52\ \mathrm{cm}^2.$$

Superficie laterale del cono (formula $\pi r a$):

$$\pi r a = \pi \cdot 11{,}5 \cdot 40{,}02 \approx 1445{,}90\ \mathrm{cm}^2.$$

Per una faccia: $113{,}52 + 1445{,}90 = 1559{,}42\ \mathrm{cm}^2$. Le facce sono sei, quindi:

$$S = 6 \cdot \left[(\ell^2 - \pi r^2) + \pi r a\right] = 6 \cdot 1559{,}42 \approx 9356{,}5\ \mathrm{cm}^2.$$

RISULTATO — PUNTO (B)

$$S = 6\,(529 - 132{,}25\,\pi) + 69\,\pi\,a \approx 9356{,}5\ \text{cm}^2 \quad (a = \sqrt{1601{,}69}\,).$$

SUI NUMERI "NON BELLI"

Qui l'apotema è un numero irrazionale ($a \approx 40{,}02$ cm) e la superficie finale non è intera. È normale: non tutti i problemi danno risultati puliti. L'importante è impostare bene il ragionamento e poi usare la calcolatrice per l'approssimazione finale, indicando sempre quante cifre si tengono.

2. Piano cartesiano — tre rette, un triangolo, una rotazione

INTERSEZIONI, PERIMETRO, AREA, SOLIDO DI ROTAZIONE

Punto (a) — Le intersezioni a due a due

Le tre rette sono: $y = 0$ (l'asse x), $x = 3$ (verticale), $y = \frac{4}{3}x$ (passa per l'origine). Troviamo i tre punti di incontro mettendole a sistema a due a due.

$y = 0$ con $x = 3$: il punto ha $x = 3$ e $y = 0$, cioè $A(3;\ 0)$.

$y = 0$ con $y = \frac{4}{3}x$: imponendo $\frac{4}{3}x = 0$ si ottiene $x = 0$, quindi $O(0;\ 0)$ (l'origine).

$x = 3$ con $y = \frac{4}{3}x$: sostituendo $x = 3$ si ha $y = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$, quindi $B(3;\ 4)$.

RISULTATO — PUNTO (A)

I tre vertici sono $O(0;\ 0)$, $A(3;\ 0)$, $B(3;\ 4)$.

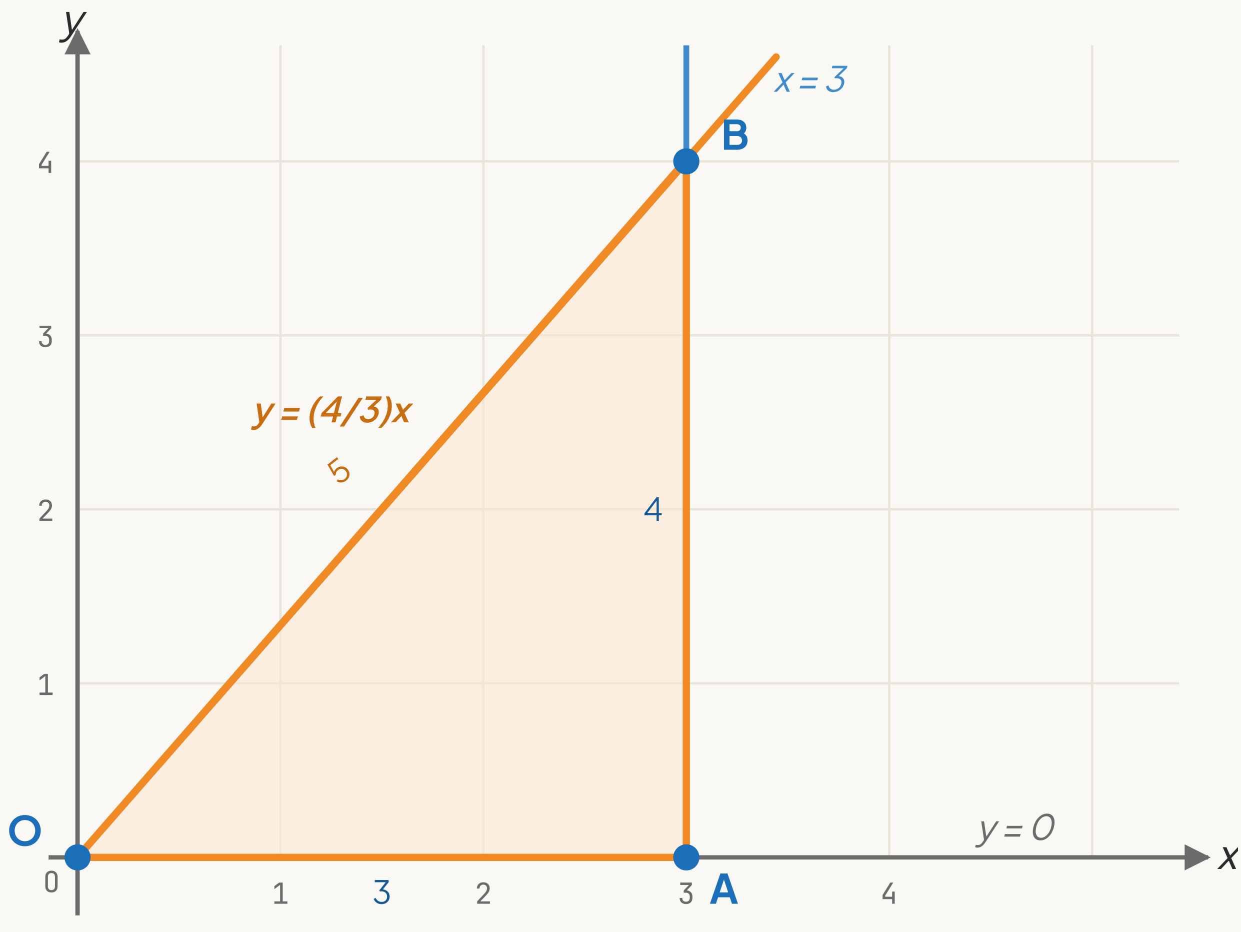

Figura 1 — Le rette $y = 0$, $x = 3$, $y = \frac{4}{3}x$ formano il triangolo rettangolo OAB (cateti 3 e 4, ipotenusa 5).

Punto (b) — Perimetro e area

Il triangolo OAB è rettangolo, con l'angolo retto in $A(3;\ 0)$. I due cateti sono:

- $\overline{OA}$, orizzontale, lungo $3\ \mathrm{cm}$ (da $x = 0$ a $x = 3$ sull'asse);
- $\overline{AB}$, verticale, lungo $4\ \mathrm{cm}$ (da $y = 0$ a $y = 4$ sulla retta $x = 3$).

L'ipotenusa $\overline{OB}$ si trova con il teorema di Pitagora:

$$\overline{OB} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5\ \mathrm{cm}.$$

TERNA PITAGORICA 3-4-5

Ritroviamo la terna pitagorica più famosa: cateti 3 e 4, ipotenusa 5. Riconoscerla evita di dover stimare la radice.

Perimetro:

$$2p = 3 + 4 + 5 = 12\ \mathrm{cm}.$$

Area (i due cateti sono base e altezza):

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{AB}}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\ \mathrm{cm}^2.$$

RISULTATO — PUNTO (B)

Triangolo rettangolo; $2p = 12\ \mathrm{cm}$; $\mathcal{A} = 6\ \mathrm{cm}^2$.

Punto (c) — Rotazione attorno al cateto minore

Il cateto minore è $\overline{OA} = 3\ \mathrm{cm}$. Facendo ruotare il triangolo di un giro completo attorno a questo lato, otteniamo un **cono**:

- il cateto minore $\overline{OA}$ diventa l'**altezza** del cono: $h = 3\ \mathrm{cm}$;
- l'altro cateto $\overline{AB}$ diventa il **raggio** di base: $r = 4\ \mathrm{cm}$ (è la distanza del vertice B dall'asse di rotazione).

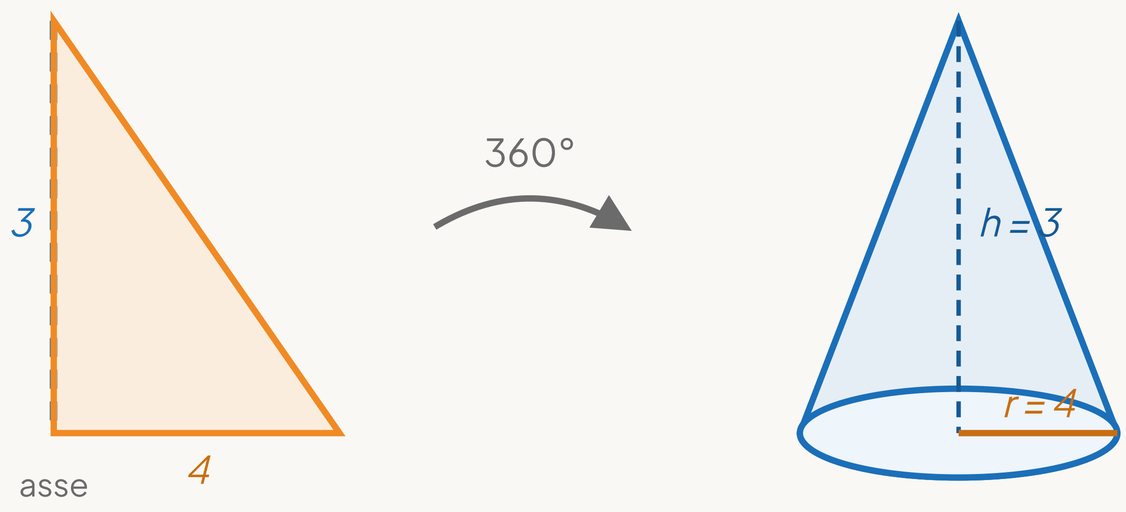

Figura 2 — Ruotando attorno al cateto minore ($3\ \mathrm{cm}$, asse) si ottiene un cono di altezza $3\ \mathrm{cm}$ e raggio $4\ \mathrm{cm}$.

Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 3 = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 3 = 16\,\pi\ \mathrm{cm}^3 \approx 50{,}27\ \mathrm{cm}^3.$$

RISULTATO — PUNTO (C)

$V = 16\,\pi\ \mathrm{cm}^3 \approx 50{,}27\ \mathrm{cm}^3.$

ATTENZIONE A QUALE LATO SI RUOTA

Se avessimo ruotato attorno al cateto *maggiore* ($4\ \mathrm{cm}$) avremmo ottenuto un cono diverso: $h = 4$, $r = 3$, con volume $\frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi\ \mathrm{cm}^3$. Il lato attorno a cui si ruota diventa sempre l'altezza; l'altro cateto diventa il raggio.

3. Calcolo letterale, problema, equazione

UN PROBLEMA CON INCOGNITA, UN'ESPRESSIONE, UN'EQUAZIONE

Punto (a) — La divisione del premio

Conviene chiamare x la quota del **terzo** classificato (la più piccola) ed esprimere le altre in funzione di x:

- terzo classificato: x;
- secondo classificato: 40 € più del terzo, cioè $x + 40$;
- primo classificato: il doppio del secondo, cioè $2(x + 40)$.

La somma delle tre quote è il premio totale, 200 €:

$$x + (x + 40) + 2(x + 40) = 200.$$

Sviluppiamo e risolviamo:

$$x + x + 40 + 2x + 80 = 200 \implies 4x + 120 = 200 \implies 4x = 80 \implies x = 20.$$

Quindi: terzo $= 20$ €, secondo $= 20 + 40 = 60$ €, primo $= 2 \cdot 60 = 120$ €.

VERIFICA

$20 + 60 + 120 = 200$ €. Il secondo ha 40 € più del terzo ($60 = 20 + 40$) e il primo è il doppio del secondo ($120 = 2 \cdot 60$). Tutto torna.

RISULTATO — PUNTO (A)

Terzo classificato 20 €, secondo 60 €, primo 120 €.

Punto (b) — L'espressione letterale

Conviene sviluppare tutto letteralmente, poi sostituire i valori. L'espressione è:

$$E = 3ab(1 - 2a) - 3(2 + b)^2 - (-a - b)(-a + b) - \left[a - (-2b) - 1\right].$$

Sviluppiamo i quattro pezzi separatamente.

Primo pezzo: $3ab(1 - 2a) = 3ab - 6a^2b$.

Secondo pezzo: $3(2 + b)^2 = 3(4 + 4b + b^2) = 12 + 12b + 3b^2$ (con il segno meno davanti diventerà $-12 - 12b - 3b^2$).

Terzo pezzo: $(-a - b)(-a + b)$. Riconosciamo la forma somma per differenza: $(-a)^2 - b^2 = a^2 - b^2$. Con il segno meno davanti: $-(a^2 - b^2) = -a^2 + b^2$.

Quarto pezzo: $\left[a - (-2b) - 1\right] = a + 2b - 1$. Con il segno meno davanti: $-a - 2b + 1$.

Mettiamo tutto insieme:

$$E = 3ab - 6a^2b - 12 - 12b - 3b^2 - a^2 + b^2 - a - 2b + 1.$$

Raccogliamo i termini simili: i numeri $-12 + 1 = -11$; i termini in b: $-12b - 2b = -14b$; i termini in b^2: $-3b^2 + b^2 = -2b^2$. Quindi:

$$E = -6a^2b + 3ab - a^2 - 2b^2 - a - 14b - 11.$$

Ora sostituiamo $a = 2$ e $b = 3$:

$$E = -6 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 4 - 2 \cdot 9 - 2 - 14 \cdot 3 - 11.$$

$$E = -72 + 18 - 4 - 18 - 2 - 42 - 11 = -131.$$

VERIFICA SOSTITUENDO DIRETTAMENTE

$3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 - 4) - 3(2 + 3)^2 - (-2 - 3)(-2 + 3) - [2 + 6 - 1] = 18 \cdot (-3) - 75 - (-5)(1) - 7 = -54 - 75 + 5 - 7 = -131.$
Stesso risultato.

RISULTATO — PUNTO (B)

$E(a = 2,\ b = 3) = -131.$

Punto (c) — L'equazione

$$\frac{x^2 + 6}{3} + \frac{3x - 16}{4} = \frac{(x - 2)^2}{3}.$$

ATTENZIONE — SEMBRA DI SECONDO GRADO, MA NON LO È

Compare x^2 sia a sinistra sia a destra. Sviluppando $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$, i termini in x^2 si **elidono** e resta un'equazione di primo grado. Conviene quindi sviluppare prima il quadrato.

Sviluppiamo il quadrato: $(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$. Il $\text{mcm}(3, 4, 3) = 12$. Moltiplichiamo tutto per 12:

$$4(x^2 + 6) + 3(3x - 16) = 4(x^2 - 4x + 4).$$

Sviluppiamo:

$$4x^2 + 24 + 9x - 48 = 4x^2 - 16x + 16.$$

I termini $4x^2$ compaiono su entrambi i membri e si semplificano. Resta:

$$9x - 24 = -16x + 16.$$

Portiamo le x a sinistra e i numeri a destra:

$$9x + 16x = 16 + 24 \implies 25x = 40 \implies x = \frac{40}{25} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

> **VERIFICA**
>
> Con $x = 1{,}6$: primo membro $= \dfrac{1{,}6^2 + 6}{3} + \dfrac{3 \cdot 1{,}6 - 16}{4} = \dfrac{8{,}56}{3} + \dfrac{-11{,}2}{4} \approx 2{,}853 - 2{,}8 = 0{,}053$; secondo membro $= \dfrac{(1{,}6 - 2)^2}{3} = \dfrac{0{,}16}{3} \approx 0{,}053$. Coincidono.

> **RISULTATO — PUNTO (C)**
>
> $x = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$ · equazione **determinata**.

---

4. Matematica applicata — il cubo che preme sul tavolo

AREA, PRESSIONE E PROPORZIONALITÀ DIRETTA

Punto (a) — Area della faccia di base

La faccia di base è un quadrato di lato $\ell = 4\ \mathrm{cm}$:

$$A = \ell^2 = 4^2 = 16\ \mathrm{cm}^2.$$

> **RISULTATO — PUNTO (A)**
>
> $A = 16\ \mathrm{cm}^2.$

Punto (b) — La pressione

La pressione è il rapporto fra la forza e l'area su cui agisce, $p = \dfrac{F}{A}$. Con $F = 12\ \mathrm{N}$ e $A = 16\ \mathrm{cm}^2$:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{12\ \mathrm{N}}{16\ \mathrm{cm}^2} = 0{,}75\ \mathrm{N/cm}^2.$$

> **IN PASCAL, SE SERVE**
>
> L'unità di misura "ufficiale" della pressione è il pascal ($1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N/m}^2$). Convertiamo l'area in metri quadrati: $16\ \mathrm{cm}^2 = 16 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 = 0{,}0016\ \mathrm{m}^2$. Allora $p = \dfrac{12}{0{,}0016} = 7500\ \mathrm{Pa}$. È lo stesso valore, espresso in un'unità diversa.

> **RISULTATO — PUNTO (B)**
>
> $p = 0{,}75\ \mathrm{N/cm}^2 = 7500\ \mathrm{Pa}.$

Punto (c) — Relazione tra forza e pressione

Teniamo fissa l'area $A = 16\ \mathrm{cm}^2$ e facciamo variare la forza. La relazione $p = \dfrac{F}{A}$ diventa:

$$p = \frac{1}{A} \cdot F = \frac{1}{16} \cdot F = 0{,}0625 \cdot F.$$

È della forma $p = k \cdot F$ con $k = \dfrac{1}{16}$ costante: p ed F sono **direttamente proporzionali**. Al raddoppiare della forza raddoppia la pressione. Il grafico è una **retta passante per l'origine**.

Costruiamo qualche punto della tabella ($p = F/16$):

$$F = 4 \Rightarrow p = 0{,}25; \quad F = 8 \Rightarrow p = 0{,}5; \quad F = 12 \Rightarrow p = 0{,}75; \quad F = 16 \Rightarrow p = 1.$$

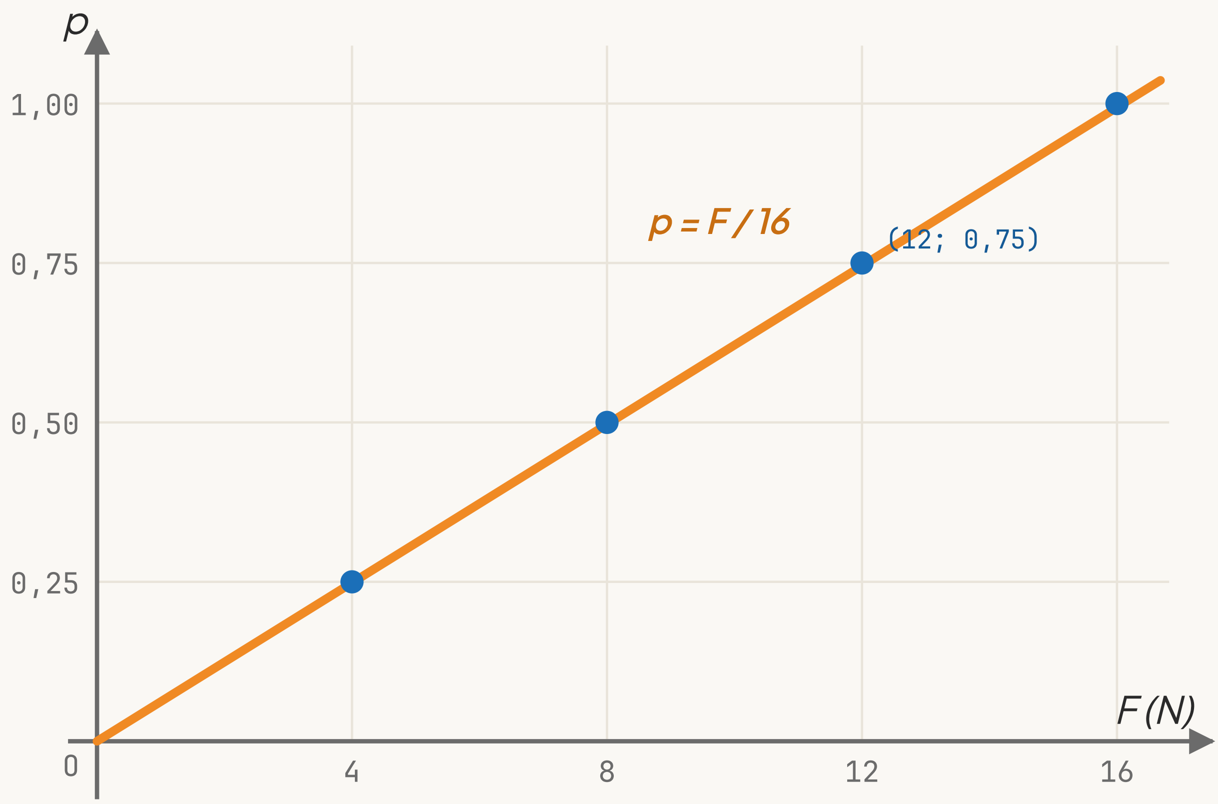

Figura 3 — La pressione è direttamente proporzionale alla forza (area costante): il grafico è una retta passante per l'origine.

RISULTATO — PUNTO (C)

p ed F sono **direttamente proporzionali**: $p = \dfrac{1}{16}F$, retta per l'origine.