1. Geometria piana e solidi di rotazione

DAL RETTANGOLO AL CILINDRO, FINO AL CUBO EQUIVALENTE

Punto (a) — Perimetro, area, diagonale

Ricaviamo prima l'altezza. La base è $b = 8$ cm e l'altezza è $\frac{7}{2}$ della base:

$$h = \frac{7}{2} \cdot b = \frac{7}{2} \cdot 8 = 28 \text{ cm}.$$

Perimetro — doppio della somma di base e altezza:

$$2p = 2\,(b + h) = 2\,(8 + 28) = 2 \cdot 36 = 72 \text{ cm}.$$

Area — prodotto di base e altezza:

$$\mathcal{A} = b \cdot h = 8 \cdot 28 = 224 \text{ cm}^2.$$

Diagonale — divide il rettangolo in due triangoli rettangoli di cateti b e h; è l'ipotenusa. Per il teorema di Pitagora:

$$d = \sqrt{b^2 + h^2} = \sqrt{8^2 + 28^2} = \sqrt{64 + 784} = \sqrt{848} \text{ cm}.$$

Semplifichiamo la radice scomponendo $848 = 16 \cdot 53$, dove 16 è un quadrato perfetto:

$$d = \sqrt{16 \cdot 53} = 4\sqrt{53} \approx 29{,}12 \text{ cm}.$$

RISULTATO — PUNTO (A)

$$2p = 72 \text{ cm}; \quad \mathcal{A} = 224 \text{ cm}^2; \quad d = 4\sqrt{53} \approx 29{,}12 \text{ cm}.$$

Punto (b) — Rotazione attorno al lato maggiore

Il lato maggiore è l'altezza, lunga 28 cm (la base è solo 8 cm). Facciamo ruotare il rettangolo di un giro completo attorno a questo lato.

COME IMMAGINARE LA ROTAZIONE

Il lato attorno a cui si ruota resta fermo: diventa l'**asse** del solido. Tutti gli altri punti descrivono delle circonferenze, e il risultato è un **cilindro**. Il lato fisso (il maggiore, 28 cm) diventa l'**altezza** del cilindro; il lato perpendicolare ad esso (la base del rettangolo, 8 cm) diventa il **raggio**. Attenzione a non invertirli: il raggio non è il lato attorno a cui ruoti, ma quello che "spazza" il cerchio.

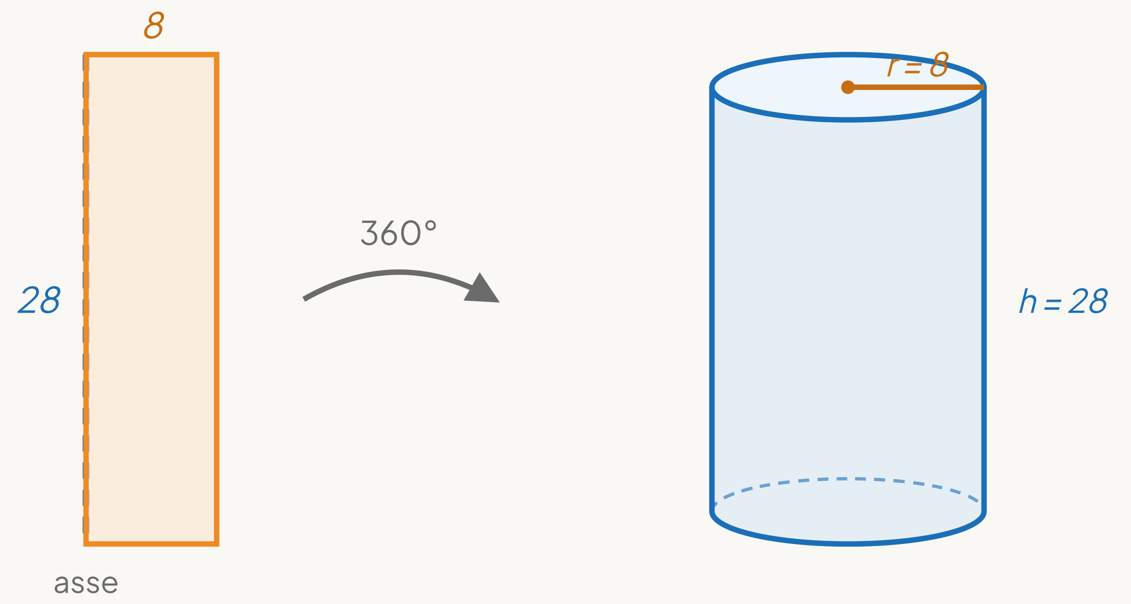

Figura 1 — Il rettangolo ruota attorno al lato di $28\ \text{cm}$ (asse) e genera un cilindro di raggio $8\ \text{cm}$ e altezza $28\ \text{cm}$.

Il cilindro ha quindi raggio $r = 8\ \text{cm}$ e altezza $h = 28\ \text{cm}$.

Volume del cilindro:

$$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 8^2 \cdot 28 = \pi \cdot 64 \cdot 28 = 1792\,\pi\ \text{cm}^3 \approx 5629{,}7\ \text{cm}^3.$$

Superficie totale — somma delle due basi e della superficie laterale; usiamo la formula raccolta:

$$S = 2\pi r\,(r + h) = 2\pi \cdot 8 \cdot (8 + 28) = 16\pi \cdot 36 = 576\,\pi\ \text{cm}^2 \approx 1809{,}6\ \text{cm}^2.$$

Scomposta: due basi $2\pi r^2 = 128\pi$; laterale $2\pi r h = 448\pi$; totale $128\pi + 448\pi = 576\pi$. Torna.

RISULTATO — PUNTO (B)

Un **cilindro** con $r = 8\ \text{cm}$, $h = 28\ \text{cm}$: $V = 1792\,\pi \approx 5629{,}7\ \text{cm}^3$; $S = 576\,\pi \approx 1809{,}6\ \text{cm}^2$.

Punto (c) — Spigolo del cubo equivalente

Due solidi sono **equivalenti** quando hanno lo stesso volume. Il cubo cercato ha quindi volume uguale a quello del cilindro:

$$V_{\text{cubo}} = 1792\,\pi\ \text{cm}^3.$$

Il volume di un cubo di spigolo ℓ è $V = \ell^3$. Per trovare lo spigolo facciamo l'operazione inversa dell'elevamento al cubo, cioè la **radice cubica**:

$$\ell = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{1792\,\pi} \approx \sqrt[3]{5629{,}7} \approx 17{,}79\ \text{cm}.$$

PERCHÉ QUI IL NUMERO NON È "BELLO"

Nei punti precedenti i risultati erano puliti; qui no, ed è del tutto normale. La radice cubica di un numero qualsiasi raramente è intera: $17^3 = 4913$ e $18^3 = 5832$, quindi lo spigolo sta fra 17 e 18, più vicino a 18. Il valore $\approx 17{,}79$ cm si ottiene con la calcolatrice ed è una risposta perfettamente accettabile.

RISULTATO — PUNTO (C)

$$\ell = \sqrt[3]{1792\,\pi} \approx 17{,}79 \text{ cm}.$$

2. Probabilità — estrazione a sorte in classe

CASO SINGOLO, CLASSE RIDOTTA, DOPPIA ESTRAZIONE

Composizione della classe: 20 alunni, di cui 11 ragazze e 9 ragazzi. Ricordiamo la definizione di probabilità in caso di eventi equiprobabili:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}.$$

Punto (a) — Probabilità di interrogare una ragazza

I casi favorevoli sono le 11 ragazze, i casi possibili sono i 20 alunni:

$$P(\text{ragazza}) = \frac{11}{20} = 0{,}55 = 55\%.$$

RISULTATO — PUNTO (A)

$$P(\text{ragazza}) = \frac{11}{20} = 55\%.$$

Punto (b) — Un ragazzo e una ragazza assenti

Se manca un ragazzo e una ragazza, i presenti diventano $20 - 2 = 18$: ora le ragazze sono $11 - 1 = 10$ e i ragazzi $9 - 1 = 8$. La probabilità di estrarre un ragazzo fra i presenti è:

$$P(\text{ragazzo}) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \approx 0{,}444 \approx 44{,}4\%.$$

RISULTATO — PUNTO (B)

$$P(\text{ragazzo}) = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \approx 44{,}4\%.$$

Punto (c) — Due estrazioni, entrambi ragazzi

ATTENZIONE — SI RIPARTE DALLA CLASSE COMPLETA

Questo punto **non** usa la situazione del punto (b): la classe è di nuovo al completo, con tutti e 20 gli alunni presenti (9 ragazzi e 11 ragazze). I due alunni vengono estratti uno dopo l'altro, **senza rimettere** il primo cognome nell'urna: le due estrazioni sono quindi dipendenti.

Prima estrazione. I ragazzi sono 9 su 20 alunni:

$$P(1^{\text{o}}\ \text{ragazzo}) = \frac{9}{20}.$$

Seconda estrazione. Se il primo estratto è un ragazzo, restano 19 alunni di cui 8 ragazzi:

$$P(2^{\text{o}}\ \text{ragazzo} \mid 1^{\text{o}}\ \text{ragazzo}) = \frac{8}{19}.$$

La probabilità che **entrambi** siano ragazzi è il prodotto delle due:

$$P(\text{due ragazzi}) = \frac{9}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{72}{380} = \frac{18}{95} \approx 0{,}189 \approx 18{,}9\%.$$

RISULTATO — PUNTO (C)

$$P(\text{due ragazzi}) = \frac{9}{20} \cdot \frac{8}{19} = \frac{18}{95} \approx 18{,}9\%.$$

---

3. Equazioni di primo grado

DEFINIZIONI E CLASSIFICAZIONE

Le tre definizioni

Dopo aver svolto i calcoli, ogni equazione di primo grado si riduce alla forma $ax = b$. In base ai valori di a e b distinguiamo tre casi:

DETERMINATA · INDETERMINATA · IMPOSSIBILE

Determinata: ammette una e una sola soluzione. Succede quando $a \neq 0$, e la soluzione è $x = \dfrac{b}{a}$.

Indeterminata: è verificata da qualsiasi valore di x (infinite soluzioni). Succede quando $a = 0$ e $b = 0$, cioè quando si riduce a $0 = 0$.

Impossibile: non è verificata da nessun valore di x (nessuna soluzione). Succede quando $a = 0$ e $b \neq 0$, cioè quando si riduce a un'uguaglianza falsa come $0 = 5$.

Equazione (a)

$$\frac{3+2x}{3} = -\frac{5-x}{2} + 2\left[1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{2x-3}{5}\right]$$

Semplifichiamo prima la parentesi quadra. Calcoliamo il prodotto interno:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2x-3}{5} = \frac{2(2x-3)}{15} = \frac{4x-6}{15}.$$

Sostituiamo dentro la parentesi quadra:

$$2\left[1 - \frac{4x-6}{15}\right] = 2\cdot\frac{15-(4x-6)}{15} = 2\cdot\frac{21-4x}{15} = \frac{42-8x}{15}.$$

L'equazione diventa:

$$\frac{3+2x}{3} = -\frac{5-x}{2} + \frac{42-8x}{15}.$$

Il $\mathrm{mcm}(3,2,15)=30$. Moltiplichiamo tutto per 30:

$$10\,(3+2x) = -15\,(5-x) + 2\,(42-8x).$$

Sviluppiamo:

$$30 + 20x = -75 + 15x + 84 - 16x.$$

A destra: $15x - 16x = -x$ e $-75+84=9$. Quindi:

$$30 + 20x = 9 - x.$$

Portiamo le x a sinistra e i numeri a destra:

$$20x + x = 9 - 30 \implies 21x = -21 \implies x = -1.$$

RISULTATO — EQUAZIONE (A)

$x = -1$ · equazione **determinata** ($a = 21 \neq 0$).

Equazione (b)

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(4 - \frac{2x-4}{5}\right) + \frac{3}{4} - x = \frac{1}{2} - x + \frac{7+6x}{10}$$

Sviluppiamo la parentesi a sinistra: $\frac{1}{4}\left(4 - \frac{2x-4}{5}\right) = 1 - \frac{2x-4}{20}$. L'equazione diventa:

$$\frac{1}{2} - 1 + \frac{2x-4}{20} + \frac{3}{4} - x = \frac{1}{2} - x + \frac{7+6x}{10}.$$

Il $\mathrm{mcm}(2,20,4,1,10)=20$. Moltiplichiamo tutto per 20:

$$10 - 20 + (2x-4) + 15 - 20x = 10 - 20x + 2\,(7+6x).$$

Sviluppiamo e raccogliamo. A sinistra: numeri $10 - 20 - 4 + 15 = 1$; termini in x: $2x - 20x = -18x$. A destra: $10 + 14 = 24$ per i numeri; termini in x: $-20x + 12x = -8x$. Quindi:

$$-18x + 1 = -8x + 24.$$

Portiamo le x a sinistra e i numeri a destra:

$$-18x + 8x = 24 - 1 \implies -10x = 23 \implies x = -\frac{23}{10} = -2{,}3.$$

> **RISULTATO — EQUAZIONE (B)**
>
> $x = -\dfrac{23}{10} = -2{,}3$ · equazione **determinata** ($a = -10 \neq 0$).

Equazione (c)

$$2\left[x + (x+3)\right] - 3(5 - x) + 7 = x + 4 - 3\left[5 - 2(x+1)\right] + 3$$

Sviluppiamo separatamente i due membri.

Membro sinistro: dentro la parentesi quadra $x + (x+3) = 2x + 3$, quindi $2(2x+3) = 4x + 6$. Poi $-3(5 - x) = -15 + 3x$. In tutto:

$$4x + 6 - 15 + 3x + 7 = 7x - 2.$$

Membro destro: dentro la parentesi quadra $5 - 2(x+1) = 5 - 2x - 2 = 3 - 2x$, quindi $-3(3 - 2x) = -9 + 6x$. In tutto:

$$x + 4 - 9 + 6x + 3 = 7x - 2.$$

L'equazione è quindi:

$$7x - 2 = 7x - 2.$$

Portando tutto a sinistra otteniamo $0 = 0$: i due membri sono identici per qualsiasi valore di x.

> **RISULTATO — EQUAZIONE (C)**
>
> $0 = 0$ · equazione **indeterminata** (verificata da ogni x).

4. Proporzionalità — massa costante

DENSITÀ E VOLUME LEGATI DA UN PRODOTTO COSTANTE

La relazione è $m = d \cdot V$ con $m = 80\ \text{g}$ costante. Da qui ricaviamo le due formule inverse che useremo per completare la tabella:

$$V = \frac{80}{d} \qquad \text{e} \qquad d = \frac{80}{V}.$$

Punto (a) — Completare la tabella

Per ogni colonna usiamo il dato presente per calcolare il mancante. Le celle calcolate sono evidenziate.

d (g/cm³)	4	5	8	10	16	40	2
V (cm³)	20	16	10	8	5	2	40

Verifichiamo qualche cella (le celle in colore sono quelle calcolate):

- $d = 4 \;\Rightarrow\; V = \dfrac{80}{4} = 20$;
- $V = 16 \;\Rightarrow\; d = \dfrac{80}{16} = 5$;
- $d = 8 \;\Rightarrow\; V = \dfrac{80}{8} = 10$;
- $V = 8 \;\Rightarrow\; d = \dfrac{80}{8} = 10$;
- $d = 16 \;\Rightarrow\; V = \dfrac{80}{16} = 5$;
- $V = 2 \;\Rightarrow\; d = \dfrac{80}{2} = 40$;
- $d = 2 \;\Rightarrow\; V = \dfrac{80}{2} = 40$.

CONTROLLO RAPIDO

In ogni colonna il prodotto $d \cdot V$ deve dare sempre 80. Ad esempio: $4 \cdot 20 = 80$, $5 \cdot 16 = 80$, $8 \cdot 10 = 80$, $10 \cdot 8 = 80$, $16 \cdot 5 = 80$, $40 \cdot 2 = 80$, $2 \cdot 40 = 80$. Tutte le colonne rispettano la condizione.

Punto (b) — Tipo di proporzionalità

Due grandezze sono **inversamente proporzionali** quando il loro **prodotto è costante**: al raddoppiare di una, l'altra si dimezza. Qui il prodotto $d \cdot V = 80$ è sempre lo stesso, quindi d e V sono **inversamente proporzionali**.

La formula che lega le due grandezze, $V = \dfrac{80}{d}$, è proprio la forma tipica della proporzionalità inversa $\left(y = \dfrac{k}{x} \text{ con } k \text{ costante}\right)$, dove la costante $k = 80$ è la massa.

RISULTATO — PUNTO (B)

d e V sono **inversamente proporzionali**: $d \cdot V = 80 =$ costante.

Punto (c) — Rappresentazione grafica

Riportiamo i punti $(d; V)$ della tabella sul piano cartesiano e li uniamo con una curva continua. Poiché la proporzionalità è inversa, il grafico è un ramo di **iperbole equilatera** nel primo quadrante: la curva si avvicina indefinitamente agli assi senza mai toccarli (quando d è grande V è piccolo, e viceversa).

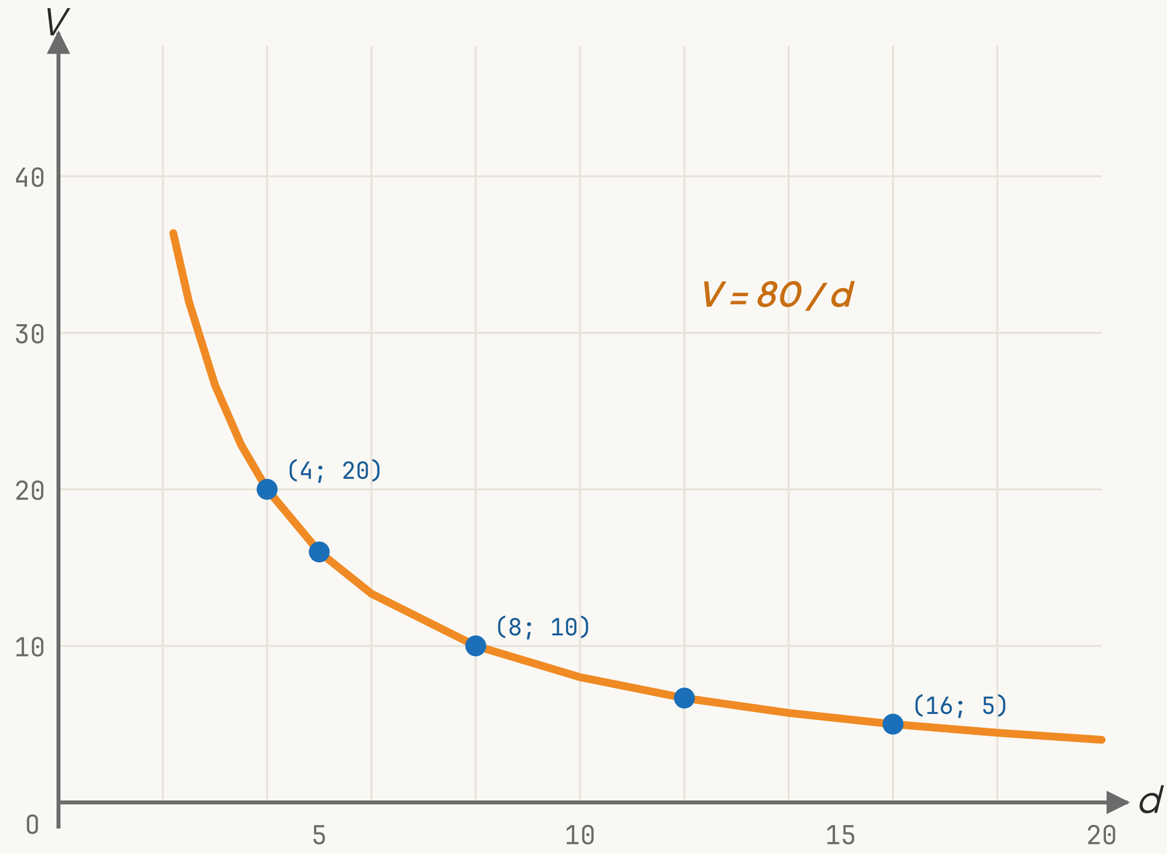

Figura 2 — Grafico della relazione $V = \frac{80}{d}$: un ramo di iperbole equilatera nel primo quadrante. La curva non tocca mai gli assi.