

1. Geometria solida — cilindro con cono sopra

SUPERFICIE TOTALE DI UN SOLIDO COMPOSTO E VARIAZIONE CON UN SECONDO CONO

Capire la figura

Il solido è formato da due parti incollate: un cilindro sotto e un cono sopra, appoggiato come un cappello. La base del cono coincide esattamente con il cerchio superiore del cilindro: quindi **il raggio del cilindro è uguale al raggio del cono**, $r = 5 \text{ cm}$, e l'altezza totale è la somma delle due altezze:

$$h_{\text{tot}} = h_{\text{cil}} + h_{\text{con}} = 21 \text{ cm.}$$

Trovare le due altezze

Sappiamo che $h_{\text{con}} = \frac{4}{3} h_{\text{cil}}$. Sostituiamo nell'equazione dell'altezza totale:

$$h_{\text{cil}} + \frac{4}{3} h_{\text{cil}} = 21.$$

Riduciamo a denominatore comune:

$$\frac{3}{3} h_{\text{cil}} + \frac{4}{3} h_{\text{cil}} = \frac{7}{3} h_{\text{cil}} = 21.$$

Quindi

$$h_{\text{cil}} = 21 \cdot \frac{3}{7} = 9 \text{ cm}, \quad h_{\text{con}} = \frac{4}{3} \cdot 9 = 12 \text{ cm.}$$

Verifica: $9 + 12 = 21$. Torna.

Apotema del cono

Per la superficie laterale del cono ci serve l'**apotema a** : la distanza dal vertice del cono al bordo della sua base. Tagliando il cono lungo l'asse otteniamo un triangolo rettangolo con cateti r e h_{con} e ipotenusa a . Per il teorema di Pitagora:

$$a = \sqrt{r^2 + h_{\text{con}}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm.}$$

TERNA PITAGORICA

I numeri **(5, 12, 13)** formano una terna pitagorica: tre numeri interi tali che la somma dei quadrati dei primi due è uguale al quadrato del terzo. Insieme a **(3, 4, 5)** e **(8, 15, 17)** è una delle terne più frequenti nei problemi di scuola. Riconoscerle a colpo d'occhio ti risparmia il calcolo della radice.

Quali superfici contano davvero — punto (a)

Quando incolliamo il cono sopra il cilindro, **due cerchi spariscono dalla vista**: la base superiore del cilindro e la base inferiore del cono. Non sono più superfici esterne e non vanno contate.

LE 3 FACCE ESTERNE DEL SOLIDO

Svolgimento ragionato

(1) base inferiore del cilindro (un cerchio) — (2) superficie laterale del cilindro — (3) superficie laterale del cono.

(1) Base inferiore del cilindro:

$$S_1 = \pi r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25 \pi \text{ cm}^2.$$

(2) Superficie laterale del cilindro — rettangolo "srotolato" di base $2\pi r$ e altezza h_{cil} :

$$S_2 = 2\pi r \cdot h_{\text{cil}} = 2\pi \cdot 5 \cdot 9 = 90 \pi \text{ cm}^2.$$

(3) Superficie laterale del cono — formula $\pi r \cdot a$:

$$S_3 = \pi r \cdot a = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65 \pi \text{ cm}^2.$$

Somma:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 25\pi + 90\pi + 65\pi = 180 \pi \text{ cm}^2.$$

RISULTATO — PUNTO (A) · SUPERFICIE TOTALE

$$S = 180 \pi \text{ cm}^2 \approx 565 \text{ cm}^2.$$

Verifica numerica: $180 \cdot \pi \approx 565,49 \text{ cm}^2$.

Cosa cambia con il secondo cono — punto (b)

Aggiungere un cono identico anche sotto modifica il solido in due modi simultanei:

- **Sparisce** la base inferiore del cilindro: prima era una superficie esterna (il cerchio appoggiato a terra), adesso è coperta dal nuovo cono. Si tolgono $25 \pi \text{ cm}^2$.
- **Compare** la superficie laterale del secondo cono, identica a quella di sopra: si aggiungono $65 \pi \text{ cm}^2$. La sua base coincide con la base inferiore del cilindro e non si vede.

Variazione netta:

$$\Delta S = -25 \pi + 65 \pi = +40 \pi \text{ cm}^2.$$

La superficie totale **aumenta** di $40 \pi \text{ cm}^2$, quindi il nuovo valore è

$$S' = S + \Delta S = 180 \pi + 40 \pi = 220 \pi \text{ cm}^2.$$

RISULTATO — PUNTO (B) · VARIAZIONE E NUOVA SUPERFICIE

$$\Delta S = +40 \pi \text{ cm}^2 \approx +126 \text{ cm}^2; \quad S' = 220 \pi \text{ cm}^2 \approx 691 \text{ cm}^2.$$

PERCHÉ LA SUPERFICIE AUMENTA?

Sostituiamo un cerchio piatto (area $\pi r^2 = 25\pi$) con la superficie laterale di un cono che ha la stessa base e altezza non nulla. Geometricamente la superficie del cono "si arrampica" da quel cerchio fino al vertice:

Svolgimento ragionato

percorre più strada, quindi è più estesa. La differenza $65\pi - 25\pi = 40\pi$ misura esattamente quanta superficie in più stiamo creando per coprire la stessa "base".

2. Piano cartesiano — triangolo e retta

CLASSIFICAZIONE, PERIMETRO, AREA, INTERSEZIONI

Punto (a) — Che poligono si ottiene?

I tre punti sono $A(-5; 2)$, $B(1; 2)$, $C(-2; 6)$. Non sono allineati (provate a verificarlo: A e B hanno la stessa ordinata $y = 2$, ma C ha $y = 6$). Quindi unendoli si ottiene un **triangolo**.

Calcoliamo le tre lunghezze dei lati, usando la formula della distanza fra due punti del piano:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Lato $\overline{AB}$. A e B hanno la stessa ordinata: il segmento è *orizzontale* e la sua lunghezza è la differenza fra le ascisse:

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = |1 - (-5)| = 6 \text{ cm.}$$

Lato $\overline{AC}$.

$$\overline{AC} = \sqrt{(-2 - (-5))^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

Lato $\overline{BC}$.

$$\overline{BC} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm.}$$

Abbiamo $\overline{AC} = \overline{BC} = 5 \text{ cm}$, mentre $\overline{AB} = 6 \text{ cm}$: il triangolo è **isoscele**, con base $\overline{AB}$ e lati obliqui $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.

OSSERVAZIONE — TERNA PITAGORICA 3-4-5

Sia per $\overline{AC}$ che per $\overline{BC}$ ritroviamo la terna $(3, 4, 5)$: i cateti del triangolo rettangolo "spostamento orizzontale + spostamento verticale" valgono **3** e **4**, e l'ipotenusa **5**.

Punto (b) — Perimetro e area

Il perimetro è la somma dei tre lati:

$$2p = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 6 + 5 + 5 = 16 \text{ cm.}$$

Per l'area ci serve l'altezza h relativa ad $\overline{AB}$. Poiché $\overline{AB}$ è orizzontale (sta sulla retta $y = 2$), l'altezza è la **distanza verticale** di C da quella retta:

$$h = |y_C - 2| = |6 - 2| = 4 \text{ cm.}$$

Quindi

Svolgimento ragionato

$$\mathcal{A} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

RISULTATO – PUNTO (B)

Triangolo isoscele; $2p = 16 \text{ cm}$; $\mathcal{A} = 12 \text{ cm}^2$.

CURIOSITÀ GEOMETRICA

Il piede dell'altezza ha ascissa uguale al punto medio di $\overline{AB}$, cioè $\frac{-5+1}{2} = -2$. Coincide con l'ascissa di C ! Questo conferma da solo che il triangolo è isoscele rispetto alla base $\overline{AB}$: C sta esattamente sopra il punto medio della base.

Punto (c) – Intersezione con la retta $y = 2x + 2$

La retta $y = 2x + 2$ ha pendenza 2 e intercetta l'asse y in $(0; 2)$. Per disegnarla bastano due punti: $(0; 2)$ e $(-1; 0)$.

Per trovare le intersezioni con il triangolo, scriviamo l'equazione di ciascun lato e risolviamo il sistema con la retta.

Lato $\overline{AB}$ – è il segmento orizzontale di equazione $y = 2$, con $x \in [-5; 1]$. Sistema:

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = 2x + 2 \end{cases} \implies 2 = 2x + 2 \implies x = 0.$$

Il valore $x = 0$ sta nell'intervallo $[-5; 1]$: **intersezione $P_1(0; 2)$** .

Lato $\overline{AC}$ – passa per $A(-5; 2)$ e $C(-2; 6)$. Pendenza:

$$m_{AC} = \frac{6 - 2}{-2 - (-5)} = \frac{4}{3}.$$

Equazione (usando A): $y - 2 = \frac{4}{3}(x + 5)$, cioè $y = \frac{4}{3}x + \frac{26}{3}$, con $x \in [-5; -2]$. Sistema con la retta:

$$2x + 2 = \frac{4}{3}x + \frac{26}{3}.$$

Moltiplichiamo per 3 : $6x + 6 = 4x + 26 \implies 2x = 20 \implies x = 10$. Ma $x = 10$ non sta nell'intervallo $[-5; -2]$: la retta interseca il *prolungamento* di $\overline{AC}$, non il lato stesso. **Nessuna intersezione su $\overline{AC}$** .

Lato $\overline{BC}$ – passa per $B(1; 2)$ e $C(-2; 6)$. Pendenza:

$$m_{BC} = \frac{6 - 2}{-2 - 1} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}.$$

Equazione (usando B): $y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 1)$, cioè $y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$, con $x \in [-2; 1]$. Sistema con la retta:

Svolgimento ragionato

$$2x + 2 = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}.$$

Moltiplichiamo per 3: $6x + 6 = -4x + 10 \Rightarrow 10x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{5} = 0,4$. Questo valore sta in $[-2; 1]$: ok. La corrispondente ordinata è $y = 2 \cdot \frac{2}{5} + 2 = \frac{14}{5} = 2,8$. Intersezione $P_2\left(\frac{2}{5}; \frac{14}{5}\right) = (0,4; 2,8)$.

RISULTATO – PUNTO (C)

La retta $y = 2x + 2$ interseca il triangolo in due punti: $P_1(0; 2)$ sul lato $\overline{AB}$ e $P_2(0,4; 2,8)$ sul lato $\overline{BC}$.

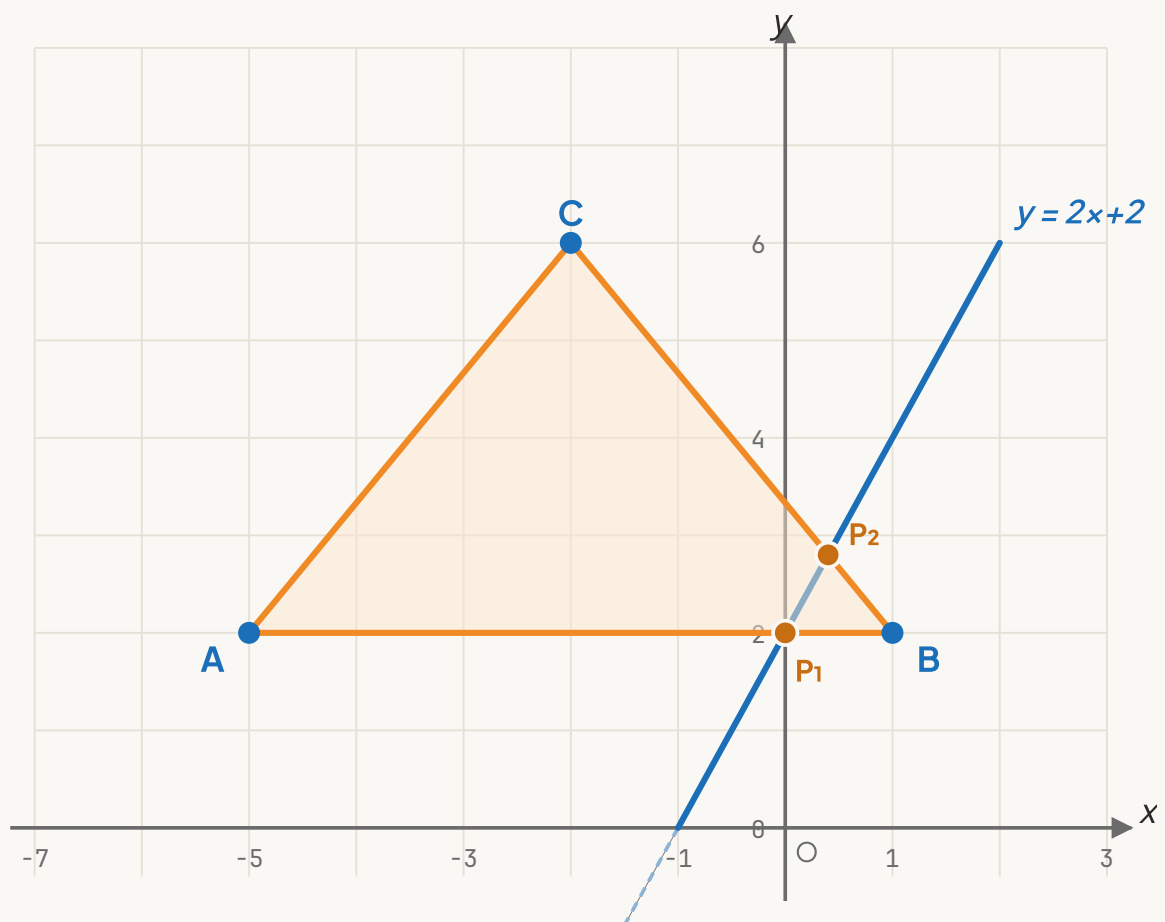


Figura 1 – Triangolo ABC e retta $y = 2x + 2$. La retta entra nel triangolo in $P_1(0; 2)$ e ne esce in $P_2(0,4; 2,8)$.

3. Calcolo letterale ed equazioni

PRODOTTI NOTEVOLI, SOSTITUZIONE, EQUAZIONI FRATTE

Punto (a) — Sviluppare i prodotti notevoli

Ricordiamo la formula del **quadrato di un binomio**:

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Primo prodotto. $A = 1, B = 2a$:

$$(1 - 2a)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2a + (2a)^2 = 1 - 4a + 4a^2.$$

Secondo prodotto. $A = b, B = 3$:

$$(b - 3)^2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot 3 + 3^2 = b^2 - 6b + 9.$$

RISULTATO — PUNTO (A)

$$(1 - 2a)^2 = 4a^2 - 4a + 1; \quad (b - 3)^2 = b^2 - 6b + 9.$$

Punto (b) — Valore dell'espressione per $a = 2$ e $b = -1$

Conviene **prima semplificare** l'espressione letteralmente, poi sostituire. Riscriviamo:

$$E = (1 - a)^2 - b(-a) - [-a + 2(-b + a) - 3] + b^3 + 5.$$

Sviluppiamo pezzo per pezzo.

$$(1 - a)^2 = 1 - 2a + a^2 \text{ (quadrato di binomio).}$$

$$-b(-a) = +ab \text{ (segno meno per segno meno fa più).}$$

Dentro la parentesi quadra:

$$-a + 2(-b + a) - 3 = -a - 2b + 2a - 3 = a - 2b - 3.$$

$$\text{Quindi } -[a - 2b - 3] = -a + 2b + 3 \text{ (cambio di segno a tutto ciò che era dentro).}$$

Mettiamo insieme:

$$E = \underbrace{1 - 2a + a^2}_{(1-a)^2} + \underbrace{ab}_{-b(-a)} - \underbrace{a - 2b + 3}_{-[\dots]} + b^3 + 5.$$

Sommiamo i termini simili: i monomi razionali $1 + 3 + 5 = 9$; i termini in a : $-2a - a = -3a$; resta $a^2 + ab + 2b + b^3$.

$$E = a^2 + ab + b^3 - 3a + 2b + 9.$$

Ora sostituiamo $a = 2$ e $b = -1$:

$$E = 2^2 + 2 \cdot (-1) + (-1)^3 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 9.$$

$$E = 4 - 2 - 1 - 6 - 2 + 9 = 2.$$

Svolgimento ragionato

RISULTATO – PUNTO (B)

$$E(a = 2, b = -1) = 2.$$

VERIFICA SOSTITUENDO DIRETTAMENTE

Senza semplificare prima, sostituiamo $a = 2, b = -1$ nell'espressione originale:

$$(1 - 2)^2 - (-1)(-2) - [-2 + 2(1 + 2) - 3] + (-1)^3 + 5 = 1 - 2 - [-2 + 6 - 3] - 1 + 5 = 2.$$

Stesso risultato: ok.

Punto (c) – Risoluzione delle equazioni

Equazione (i).

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}\left(x + \frac{1}{4}\right).$$

Eseguiamo i prodotti:

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}.$$

A sinistra $\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x = 0$, quindi resta solo $-\frac{1}{6}$:

$$-\frac{1}{6} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}.$$

Moltiplichiamo entrambi i membri per **12** (mcm di **6, 3, 12**):

$$-2 = 4x + 1 \implies 4x = -3 \implies x = -\frac{3}{4}.$$

VERIFICA

Sostituendo $x = -\frac{3}{4}$:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}\right) \overset{\text{primo membro}}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{13}{12}\right) + \frac{3}{8} = -\frac{13}{24} + \frac{9}{24} = -\frac{4}{24} = -\frac{1}{6}; \\ &\quad \text{secondo membro} = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

I due membri coincidono.

RISULTATO – EQUAZIONE (I)

$$x = -\frac{3}{4} \cdot \text{equazione determinata.}$$

Equazione (ii).

Svolgimento ragionato

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{2} - \frac{2x-1}{8} = \frac{x+5}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x+3}{8}.$$

I prodotti di frazioni si semplificano subito: $\frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{2} = \frac{x+2}{6}$ e $\frac{1}{3} \cdot \frac{x+3}{8} = \frac{x+3}{24}$. Riscriviamo:

$$\frac{x+2}{6} - \frac{2x-1}{8} = \frac{x+5}{6} - \frac{x+3}{24}.$$

Il **mcm**(6, 8, 6, 24) = 24. Moltiplichiamo entrambi i membri per 24:

$$4(x+2) - 3(2x-1) = 4(x+5) - (x+3).$$

Sviluppiamo:

$$4x + 8 - 6x + 3 = 4x + 20 - x - 3.$$

Semplifichiamo: a sinistra $4x - 6x = -2x$ e $8 + 3 = 11$; a destra $4x - x = 3x$ e $20 - 3 = 17$:

$$-2x + 11 = 3x + 17.$$

Portiamo le x a sinistra e i numeri a destra:

$$-2x - 3x = 17 - 11 \implies -5x = 6 \implies x = -\frac{6}{5}.$$

VERIFICA

Sostituendo $x = -\frac{6}{5}$: primo membro

$$= \frac{-\frac{6}{5} + 2}{6} - \frac{2 \cdot (-\frac{6}{5}) - 1}{8} = \frac{\frac{4}{5}}{6} - \frac{-\frac{17}{5}}{8} = \frac{4}{30} + \frac{17}{40} = \frac{16}{120} + \frac{51}{120} = \frac{67}{120};$$

secondo membro

$$= \frac{-\frac{6}{5} + 5}{6} - \frac{-\frac{6}{5} + 3}{24} = \frac{\frac{19}{5}}{6} - \frac{\frac{9}{5}}{24} = \frac{19}{30} - \frac{9}{120} = \frac{76}{120} - \frac{9}{120} = \frac{67}{120}.$$

I due membri coincidono.

RISULTATO – EQUAZIONE (II)

$$x = -\frac{6}{5} \cdot \text{equazione determinata.}$$

PROMEMORIA – CLASSIFICAZIONE DI UN'EQUAZIONE DI PRIMO GRADO

Portata nella forma $ax = b$: se $a \neq 0$ è **determinata** con unica soluzione $x = b/a$; se $a = 0$ e $b = 0$ è **indeterminata** (vera per ogni x); se $a = 0$ e $b \neq 0$ è **impossibile**. Entrambe le equazioni di questo esercizio hanno $a \neq 0$, quindi sono determinate.

4. Statistica descrittiva — i voti di Marco

MEDIA, MODA, MEDIANA, RANGE, TABELLA DI FREQUENZE

I dati: 5, 6, 7, 6, 8, 5, 7, 9, 6, 7. In tutto $n = 10$ voti.

Punto (a) — Media, moda, mediana

Media aritmetica. È la somma dei valori divisa per il loro numero:

$$\bar{x} = \frac{5 + 6 + 7 + 6 + 8 + 5 + 7 + 9 + 6 + 7}{10} = \frac{66}{10} = 6,6.$$

Moda. È il valore (o i valori) con frequenza più alta. Contiamo:

- il **5** compare **2** volte;
- il **6** compare **3** volte;
- il **7** compare **3** volte;
- l'**8** compare **1** volta;
- il **9** compare **1** volta.

Due valori — il **6** e il **7** — hanno la stessa frequenza massima, pari a **3**. La distribuzione è quindi **bimodale**: ci sono due mode, **6** e **7**.

Mediana. È il valore centrale dopo aver ordinato i dati. Ordiniamoli:

5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9.

Con $n = 10$ (numero pari) la mediana è la media fra il valore in posizione **5** e quello in posizione **6**, cioè fra il quinto **6** e il primo **7**:

$$Me = \frac{6 + 7}{2} = 6,5.$$

RISULTATO — PUNTO (A)

Media $\bar{x} = 6,6$ · moda: **6** e **7** (bimodale) · mediana **Me** = **6,5**.

Punto (b) — Range

Il range (campo di variazione) è la differenza fra il valore massimo e il valore minimo:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 9 - 5 = 4.$$

RISULTATO — PUNTO (B)

Range **R** = **4**.

Svolgimento ragionato

Punto (c) — Quale voto serve per portare la media a 7?

Dopo l'undicesima verifica Marco avrà **11** voti. Affinché la media sia **7**, la somma di tutti gli **11** voti deve valere:

$$S_{11} = 7 \cdot 11 = 77.$$

La somma attuale è **66**. Detto v il voto dell'undicesima verifica:

$$66 + v = 77 \implies v = 11.$$

ATTENZIONE — LA RICHIESTA È IMPOSSIBILE

Il voto massimo che Marco può prendere è **10**. Servirebbe **11**: non esiste. Anche col voto massimo, la nuova media sarebbe $\frac{66 + 10}{11} = \frac{76}{11} \approx 6,91$, cioè comunque **sotto 7**. La conclusione è che Marco **non può** arrivare a una media di **7** in una sola verifica.

RISULTATO — PUNTO (C)

Servirebbe un voto $v = 11$, non esistente. La richiesta è **impossibile** con una sola verifica in più: la media massima raggiungibile è $\approx 6,91$. Una media bassa nelle prime verifiche limita molto la media finale: ogni nuovo voto pesa sempre meno mano a mano che il totale cresce.

Punto (d) — Tabella delle frequenze

La frequenza assoluta è il numero di volte in cui ciascun voto compare; la frequenza relativa è il rapporto fra frequenza assoluta e numero totale di dati ($n = 10$), espresso in percentuale.

VOTO	FREQ. ASSOLUTA	FREQ. RELATIVA %
5	2	20%
6	3	30%
7	3	30%
8	1	10%
9	1	10%
Totale	10	100%

Controllo: la somma delle frequenze assolute vale **10**, esattamente il numero di voti; la somma delle frequenze relative vale **100%**. Entrambi i controlli passano, la tabella è corretta.