1. Geometria solida — prisma con cilindro inscritto

SUPERFICIE TOTALE E VOLUME DI UN SOLIDO COMPOSTO

Capire la figura

Immagina un parallelepipedo a base quadrata con sopra appoggiato un cilindro. Dire che la base del cilindro è *inscritta* nella faccia superiore del prisma significa che il cerchio tocca i lati del quadrato senza sporgere: il **diametro del cerchio coincide con il lato del quadrato**. Quindi il raggio del cilindro vale

$$r = \frac{\ell}{2} = \frac{36}{2} = 18\ \text{cm}.$$

La sottigliezza importante

Quando incolliamo il cilindro sopra il prisma, **due superfici spariscono dalla vista**: la parte di base superiore del prisma che si trova sotto il cilindro, e la base inferiore del cilindro stesso. Non sono più superfici esterne del solido: non vanno contate.

Però attenzione: il cilindro è inscritto, non coincide con il quadrato. Sulla faccia superiore del prisma **resta scoperta una corona** — la parte di quadrato fuori dal cerchio — e quella sì che si vede.

> LE 5 FACCE ESTERNE DEL SOLIDO
>
> (1) base inferiore del prisma (quadrato intero) — (2) superficie laterale del prisma (4 rettangoli) — (3) corona quadrata sulla base superiore del prisma (quadrato — cerchio inscritto) — (4) superficie laterale del cilindro — (5) base superiore del cilindro (cerchio).

Calcolo del volume

Il volume è la somma dei due volumi: i due solidi sono incollati su una faccia (volume nullo), nessuna sovrapposizione.

Volume del prisma:

$$V_{\text{prisma}} = \ell^2 \cdot h_1 = 36^2 \cdot 30 = 1296 \cdot 30 = 38\,880\ \text{cm}^3.$$

Volume del cilindro:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2 \cdot h_2 = \pi \cdot 18^2 \cdot 40 = \pi \cdot 324 \cdot 40 = 12\,960\,\pi\ \text{cm}^3.$$

> RISULTATO — VOLUME
>
> $$V = 38\,880 + 12\,960\,\pi\ \text{cm}^3 \ \approx\ 79\,595\ \text{cm}^3.$$

Verifica numerica: $12\,960 \cdot \pi \approx 40\,715{,}04$, quindi $V \approx 38\,880 + 40\,715{,}04 \approx 79\,595{,}04\ \text{cm}^3$.

Calcolo della superficie totale

Andiamo per pezzi, seguendo l'elenco dei cinque contributi.

(1) Base inferiore del prisma: quadrato di lato ℓ.

$$S_1 = \ell^2 = 36^2 = 1296 \text{ cm}^2.$$

(2) Superficie laterale del prisma: quattro rettangoli identici di base ℓ e altezza h_1.

$$S_2 = 4 \cdot \ell \cdot h_1 = 4 \cdot 36 \cdot 30 = 4320 \text{ cm}^2.$$

(3) Corona quadrata sulla base superiore del prisma: quadrato meno cerchio inscritto.

$$S_3 = \ell^2 - \pi r^2 = 1296 - 324\,\pi \text{ cm}^2.$$

(4) Superficie laterale del cilindro: rettangolo «srotolato» di base $2\pi r$ e altezza h_2.

$$S_4 = 2\pi r \cdot h_2 = 2\pi \cdot 18 \cdot 40 = 1440\,\pi \text{ cm}^2.$$

(5) Base superiore del cilindro: il cerchio.

$$S_5 = \pi r^2 = 324\,\pi \text{ cm}^2.$$

Somma:

$$S = 1296 + 4320 + (1296 - 324\,\pi) + 1440\,\pi + 324\,\pi.$$

Raccogliamo separatamente i termini razionali e quelli con π:

- termini razionali: $1296 + 4320 + 1296 = 6912$;
- termini con π: $-324 + 1440 + 324 = 1440$, quindi $1440\,\pi$.

> **OSSERVAZIONE**
>
> I termini $-324\,\pi$ della corona e $+324\,\pi$ del cerchio del cilindro si semplificano. È coerente: geometricamente è lo stesso cerchio, "preso una volta sì e una volta no".

> **RISULTATO — SUPERFICIE TOTALE**
>
> $$S = 6912 + 1440\,\pi \text{ cm}^2 \;\approx\; 11\,436 \text{ cm}^2.$$

Verifica numerica: $1440 \cdot \pi \approx 4523{,}89$, quindi $S \approx 6912 + 4523{,}89 \approx 11\,435{,}89 \approx 11\,436 \text{ cm}^2$.

2. Probabilità — estrazione di due carte

CON E SENZA REINSERIMENTO DAL MAZZO NAPOLETANO

Inquadrare il problema

Il mazzo napoletano ha **40 carte**: quattro semi (denari, coppe, spade, bastoni), ciascuno con 10 carte (asso, 2, 3, 4, 5, 6, 7, fante, cavallo, re). Le **figure** sono soltanto *fante*, *cavallo* e *re*: **l'asso non è una figura**.

Conviene introdurre due insiemi:

- A = insieme delle figure di spade $= \{$fante di spade, cavallo di spade, re di spade$\}$, con $|A| = 3$;
- B = insieme degli assi $= \{$asso di denari, asso di coppe, asso di spade, asso di bastoni$\}$, con $|B| = 4$.

> ATTENZIONE AL DOPPIO CONTEGGIO
>
> Gli insiemi A e B sono **disgiunti**: $A \cap B = \emptyset$, perché l'asso di spade sta in B ma *non* sta in A (l'asso non è una figura). Non c'è quindi nessuna carta in comune fra "figure di spade" e "assi": non rischiamo di contarla due volte.

L'evento E chiede che, fra le due carte estratte, una appartenga ad A e l'altra a B, **senza importare l'ordine**. Possiamo allora scrivere

$$P(E) = P(1^{\text{a}} \in A \text{ e } 2^{\text{a}} \in B) \; + \; P(1^{\text{a}} \in B \text{ e } 2^{\text{a}} \in A).$$

Caso (a) — con reinserimento

Se la prima carta viene rimessa nel mazzo, le due estrazioni sono **indipendenti**: il mazzo torna sempre a 40 carte e ogni estrazione vede gli stessi insiemi.

Probabilità del primo addendo:

$$P(1^{\text{a}} \in A) \cdot P(2^{\text{a}} \in B) = \frac{3}{40} \cdot \frac{4}{40} = \frac{12}{1600} = \frac{3}{400}.$$

Probabilità del secondo addendo (per simmetria, stesso valore):

$$P(1^{\text{a}} \in B) \cdot P(2^{\text{a}} \in A) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{40} = \frac{12}{1600} = \frac{3}{400}.$$

Sommando i due contributi:

$$P(E)_{(a)} = \frac{3}{400} + \frac{3}{400} = \frac{6}{400} = \frac{3}{200}.$$

RISULTATO — CASO (A) CON REINSERIMENTO

$$P(E)_{(a)} = \frac{3}{200} = 0{,}015 = 1{,}5\%.$$

Caso (b) — senza reinserimento

Se la prima carta *non* viene rimessa, il mazzo si riduce a 39 carte e la composizione cambia a seconda della prima estrazione. Le due estrazioni sono **dipendenti** e si lavora con probabilità condizionate.

Primo addendo — prima carta in A, seconda in B. Dopo aver estratto una figura di spade, restano 39 carte e tutti e 4 gli assi sono ancora nel mazzo (l'asso di spade non era una figura, non lo abbiamo tolto):

$$P(1^{\text{a}} \in A) \cdot P(2^{\text{a}} \in B \mid 1^{\text{a}} \in A) = \frac{3}{40} \cdot \frac{4}{39} = \frac{12}{1560} = \frac{1}{130}.$$

Secondo addendo — prima carta in B, seconda in A. Dopo aver estratto un asso, restano 39 carte e tutte e 3 le figure di spade sono ancora nel mazzo (l'asso estratto non era una figura di spade):

$$P(1^{\text{a}} \in B) \cdot P(2^{\text{a}} \in A \mid 1^{\text{a}} \in B) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{12}{1560} = \frac{1}{130}.$$

Sommando:

$$P(E)_{(b)} = \frac{1}{130} + \frac{1}{130} = \frac{2}{130} = \frac{1}{65}.$$

RISULTATO — CASO (B) SENZA REINSERIMENTO

$$P(E)_{(b)} = \frac{1}{65} \approx 0{,}01538 \approx 1{,}54\%.$$

CONFRONTO FRA I DUE CASI

Senza reinserimento la probabilità è leggermente **più alta** ($1/65 > 3/200$). Intuitivamente: dopo aver estratto una carta "favorevole" (in A o in B), il denominatore della seconda probabilità si riduce a 39, mentre il numeratore resta intatto (perché gli insiemi sono disgiunti). Il rapporto cresce.

3. Equazioni di primo grado

RISOLUZIONE E CLASSIFICAZIONE

Metodo

Per ciascuna equazione: (i) si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori e si moltiplica entrambi i membri per esso, eliminando le frazioni; (ii) si svolgono i prodotti e si raccolgono i termini con x a sinistra e i numeri a destra; (iii) si determina x. Un'equazione è **determinata** se ammette un'unica soluzione, **indeterminata** se è verificata da ogni x, **impossibile** se non è mai verificata.

Equazione (a)

$$\frac{3+x}{3} = \frac{2-x}{4} + \frac{2x-3}{5}$$

Il $\mathrm{mcm}(3,4,5) = 60$. Moltiplichiamo entrambi i membri per 60:

$$20\,(3+x) = 15\,(2-x) + 12\,(2x-3).$$

Sviluppiamo i prodotti:

$$60 + 20x = 30 - 15x + 24x - 36.$$

Semplifichiamo il secondo membro: $30 - 36 = -6$ e $-15x + 24x = 9x$. Quindi

$$60 + 20x = -6 + 9x.$$

Portiamo i termini con x a sinistra e i numeri a destra:

$$20x - 9x = -6 - 60 \implies 11x = -66 \implies x = -6.$$

VERIFICA

Sostituendo $x = -6$:

$$\text{primo membro} = \frac{3+(-6)}{3} = \frac{-3}{3} = -1;$$
$$\text{secondo membro} = \frac{2-(-6)}{4} + \frac{2\cdot(-6)-3}{5} = \frac{8}{4} + \frac{-15}{5} = 2 + (-3) = -1.$$

I due membri coincidono.

RISULTATO — EQUAZIONE (A)

$x = -6$ · equazione **determinata**.

Equazione (b)

$$\frac{1}{20} + \frac{2x-4}{5} + \frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x + \frac{3+3x}{10}$$

Il $\mathrm{mcm}(20,5,4,2,10) = 20$. Moltiplichiamo entrambi i membri per 20:

$$1 + 4\,(2x-4) + 15x = 10x + 2\,(3+3x).$$

Sviluppiamo i prodotti:

$$1 + 8x - 16 + 15x = 10x + 6 + 6x.$$

Semplifichiamo: a sinistra $1 - 16 = -15$ e $8x + 15x = 23x$; a destra $10x + 6x = 16x$. Quindi

$$-15 + 23x = 6 + 16x.$$

Portiamo x a sinistra e numeri a destra:

$$23x - 16x = 6 + 15 \implies 7x = 21 \implies x = 3.$$

VERIFICA

Sostituendo $x = 3$:

$$\text{primo membro} = \frac{1}{20} + \frac{2 \cdot 3 - 4}{5} + \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{1}{20} + \frac{2}{5} + \frac{9}{4} = \frac{1 + 8 + 45}{20} = \frac{54}{20} = \frac{27}{10};$$

$$\text{secondo membro} = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{3 + 3 \cdot 3}{10} = \frac{3}{2} + \frac{12}{10} = \frac{15 + 12}{10} = \frac{27}{10}.$$

I due membri coincidono.

RISULTATO — EQUAZIONE (B)

$x = 3$ · equazione **determinata**.

PROMEMORIA — CLASSIFICAZIONE DI UN'EQUAZIONE DI PRIMO GRADO

Dopo aver portato tutto nella forma $ax = b$: se $a \neq 0$ l'equazione è **determinata** con unica soluzione $x = b/a$; se $a = 0$ e $b = 0$ è **indeterminata** (vera per ogni x); se $a = 0$ e $b \neq 0$ è **impossibile**. In entrambe le equazioni di questo esercizio abbiamo $a \neq 0$, quindi sono determinate.